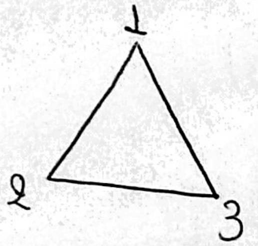
## Ισομετρίες του ισοπλεύρου τριγώνου




$$\left\{ f : \{1,2,3\} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \{1,2,3\} \right\} = \Sigma_3$$

$\Sigma_3$ γεννάται από τα 2 στοιχεία

1) Μια στροφή κατά $120^\circ$ $\quad f(1,2,3) \to (2,3,1)$

2) Μια συμμετρία ως προς τη μεσοκάθετο από την κορυφή 1: $g$

$f^2 = f.f : (1,2,3) \xrightarrow{f} (2,3,1) \xrightarrow{f} (3,1,2)$

$\boxed{f^3 = 1 \quad \text{ταυτοτική}}$ 1

$g : (1,2,3) \to (1,3,2)$

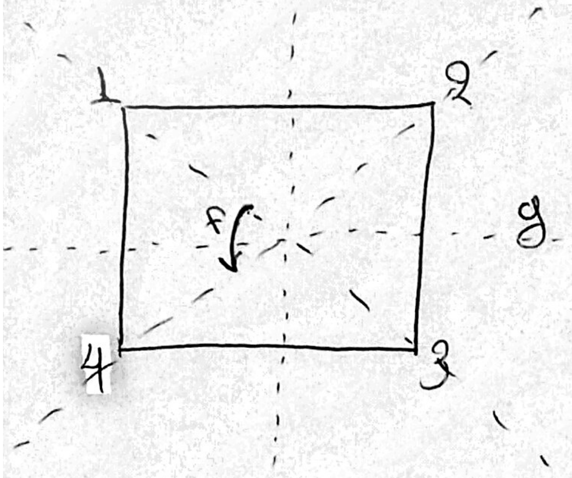
$\boxed{g^2 = 1 \quad \text{ταυτοτική}}$ 2 αφού $(1,2,3) \xrightarrow{g} (1,3,2) \xrightarrow{g} (1,2,3)$

$gfg : (1,3,2) \xrightarrow{g} (1,3,2) \xrightarrow{f} (2,1,3) \xrightarrow{g} (3,1,2)$

$\boxed{gfg = f^2}$ 3

$\Sigma_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g\}$ μαζί με τις σχέσεις 1, 2, 3

$D_4 = \{\text{συμμετρίες του τετραγώνου}\}$ $\quad$ (ο δείκτης που δείχνει το σχήμα)




8 στοιχεία

$f: (1,2,3,4) \xrightarrow[90^\circ]{\text{στροφή}} (2,3,4,1)$

$f^2 (1,2,3,4) \longrightarrow (3,4,1,2)$

$f^3: (1,2,3,4) \longrightarrow (4,1,2,3)$

$f^4 = 1$ (1)

$g: (1,2,3,4) \to (4,3,2,1)$

$g^2 = 1$ (2)

$gfg: (1,2,3,4) \xrightarrow{g} (4,3,2,1) \xrightarrow{f} (1,4,3,2) \xrightarrow{g} (4,1,2,3)$

$gfg = f^3$ (3)

$f^{-1} = f^3$ αφού $f \cdot f^3 = 1$

$gf^2g = f^{-2} = f^2$ (4)

$gf^3g = f^{-3} = f$ (5)

$D_4 = \{1, f, f^2, f^3, g, fg, f^2g, f^3g\}$ μαζί με τις σχέσεις (1), (2), (3), (4), (5)

Ονομάζεται διεδρική ομάδα με 4 στοιχεία

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> $D_4 \not\leq \Sigma_4$ $|D_4| = 8 < |\Sigma_4| = 24$

$\Sigma_3$ όχι κυκλική αφού δεν είναι αβελιανή ή αφού δεν υπάρχει στοιχείο που τα γεννάει όλα.

$|S_3| = 6$ και όχι κυκλική $\Rightarrow \nexists\, a \in S_3$ με $o(a)=6$

$o(f) = 3$ και $o(g) = 2$

Υποομάδες της $S_3$ :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \langle f, g\rangle = S_3 \arrow[d, dash] & & \text{τάξης } 6 \\
 & & \langle f \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & \text{τάξης } 3 \\
 & \langle f^2g \rangle \arrow[dr, dash] & \langle fg \rangle \arrow[d, dash] & \langle g \rangle \arrow[dl, dash] & \text{τάξης } 2 \\
 & & \langle 1 \rangle & & \text{τάξης } 1
\end{tikzcd}
$$

$f\,gfg = ff^2 = 1$

$f^2g\, f^2g = f^2f = 1$

$ggfgg = gf^2g \Rightarrow$

$\Rightarrow f = gf^2g$

$\langle f, fg\rangle = \langle f, fg, f^2g, ff^2g = g\rangle$ .

(Παρατηρώ ότι όλες οι υποομάδες είναι κυκλικές εκτός της $S_3$.)

ΠΡΟΤΑΣΗ

Με $D_\nu$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των συμμετριών ενός κανονικού ν-γώνου. Το σύνολο με πράξη τη σύνθεση αποτελεί ομάδα. Έχει $2\nu$ στοιχεία, δεν είναι αβελιανή και γεννιέται από δύο στοιχεία με μια στροφή $f$ και μια συμμετρία $g$. Η ομάδα αυτή καλείται διεδρική τάξης $2\nu$

Παράδειγμα

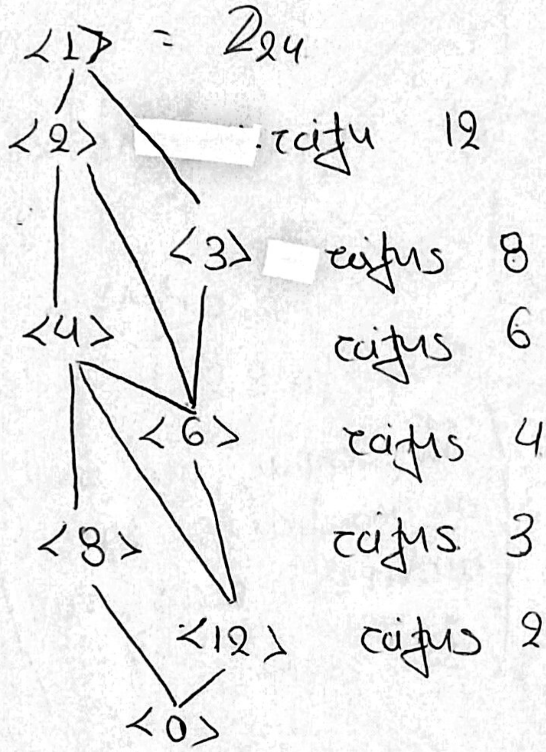
Να βρεθούν όλες οι υποομάδες της $\mathbb{Z}_{24}$

Λύση

$\mathbb{Z}_{24} = \langle [1] \rangle$ κυκλική τάξης 24.

Οι διακεκριμένες υποομάδες της κυκλικής είναι όλοι οι διακεκριμένοι διαιρέτες του 24

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 12 | 24 |
| $\langle 1\rangle$ | $\langle 2\rangle$ | $\langle 3\rangle$ | $\langle 4\rangle$ | $\langle 6\rangle$ | $\langle 8\rangle$ | $\langle 12\rangle$ | $\langle 24\rangle$ |




## ΕΥΘΕΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

π.χ. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$(a_1, a_2) + (a_1', a_2') = (a_1 + a_1', a_2 + a_2')$$

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Το καρτεσιανό ή ευθύ γινόμενο των $(A, \square)$ και $(B, \otimes)$ δίνεται από το $A\times B$ με πράξη : $(a,b)\ \square\ (a', b') = (a \square a', b \otimes b')$

Η νέα πράξη καθορίζεται από τις επιμέρους

Η νέα πράξη λέγεται πράξη κατά συντεταγμένες $A\times B = \{a, b \ / \ a\in A, b\in B\}$

Παραδείγματα

1) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(\kappa, \nu) \mid \kappa, \nu \in \mathbb{Z}\}$

$(\kappa, \nu) + (\kappa', \nu') = (\kappa + \kappa', \nu + \nu')$

2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$

$(1,0) + (1,0) = (1+1, 0+0) = (0,0)$

$O(1,0) = 2$

$(0,1) + (0,1) = (0,0)$

$O(0,1) = 2$

$(1,1) + (1,1) = (0,0)$

$O(1,1) = 2$

Άρα $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ όχι κυκλική (δεν υπάρχει στοιχείο που να έχει τάξη 4)

3) Ψάχνω $|A \times B| = 12$ όχι αβελιανή

$D_6$ έχει 12 στοιχεία αλλά δεν είναι καρτεσιανό γινόμενο

$|\Sigma_3 \times \mathbb{Z}_2| = 12$ και όχι αβελιανή αφού $\Sigma_3$ όχι αβελιανή

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $(A_1, \cdot), \dots, (A_\kappa, \cdot)$ ομάδες. Το καρτεσιανό γινόμενο τους είναι το σύνολο $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_\kappa$ με πράξη κατά συντεταγμένες $(a_1, \dots, a_\kappa) \cdot (a_1', \dots, a_\kappa') = (a_1 a_1', \dots, a_\kappa a_\kappa')$

Μοναδιαίο : $(1_{A_1}, 1_{A_2}, \dots, 1_{A_\kappa})$

$(a_1, \dots, a_\kappa)^{-1} = (a_1^{-1}, \dots, a_\kappa^{-1})$

Η $A_1 \times \ldots \times A_k$ είναι αβελιανή <u>ανν</u> όλες είναι αβελιανές

$(a_1, a_2, \ldots, a_k)(a_1', \ldots, a_k') = (a_1' a_2', \ldots a_k')(a_1, \ldots, a_k)$

$\Leftrightarrow (a_1 a_1', \ldots, a_k a_k') = (a_1' a_1, \ldots, a_k' a_k)$

$\Leftrightarrow a_1 a_1' = a_1' a_1, \ldots, a_k a_k' = a_k' a_k$

Δεν ισχύει το αντίστροφο για κυκλική

<u>Παράδειγμα</u>

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$

$(0,1) + (0,1) = (0,2)$

$(0,2) + (0,1) = (0,0)$

Άρα $O(0,1) = 3$

$O(1,0) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} (1,1) + (1,1) = (0,2) \\ (0,2) + (1,1) = (1,0) \\ (1,0) + (1,1) = (0,1) \\ (0,1) + (1,1) = (1,2) \\ (1,2) + (1,1) = (0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} O(1,1) = 6 \\ |\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3| = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \langle (1,1) \rangle$$

κυκλική

## ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $A_1, A_2, \dots, A_k$ ομάδες και $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ στοιχείο της $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$. Αν $o(a_i) = n_i$ $\quad i=1,\dots,k$ τότε

$$o(a_1,\dots,a_k) = \text{ΕΚΠ}(o(a_1),\dots,o(a_k))$$

### Απόδειξη

Έστω $o(a_1,a_2,\dots,a_k)=n \Rightarrow (a_1,a_2,\dots,a_k)^n = (1_{A_1},\dots,1_{A_k}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1^n,\dots,a_k^n) = (1_{A_1},\dots,1_{A_k})$

$a_i^n = 1_{A_i} \Rightarrow o(a_i)=n_i \mid n \quad \forall i=1,\dots,k$

Άρα $\text{ΕΚΠ}(n_1,n_2,\dots,n_k) \mid n$

Αρκεί νδο $n \mid \text{ΕΚΠ}(n_1,\dots,n_k) \iff$

$$(a_1,\dots,a_k)^{\text{ΕΚΠ}(n_1,\dots,n_k)} = (1_{A_1},1_{A_2},\dots,1_{A_k})$$

$a_i^{\text{ΕΚΠ}(n_1,n_2,\dots,n_k)} = 1_{A_i}$ αφού

$\text{ΕΚΠ}(n_1,n_2,\dots,n_k)$ είναι πολ/σιο του $n_i$

$$|\Sigma_3 \times \mathbb{Z}_6| = |\Sigma_3|\,|\mathbb{Z}_6| = 36$$

$o(f,1) = \text{ΕΚΠ}(o(f),o(1)) = \text{ΕΚΠ}(3,6) = 6$

$o(f,2) = \text{ΕΚΠ}(3,3) = 3$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$

Έστω $O = A_1 \times \dots \times A_k$ με $A_1, \dots, A_k$ ομάδες. Αν οι $A_1, \dots, A_k$ είναι κυκλικές τάξης $n_1, \dots, n_k$ τότε η $O$ είναι κυκλική ανν $\underbrace{(n_i, n_j)}_{\text{μ.κ.δ.}} = 1 \quad i \neq j$

$\boxed{\text{Απόδειξη}}$

$(\Rightarrow)$ $|O| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_k| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$. Για να είναι η $O$ κυκλική πρέπει να υπάρχει στοιχείο τάξης $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$

Έστω ότι $A_1 = \langle a_1 \rangle$, $A_2 = \langle a_2 \rangle$, $\dots$, $A_k = \langle a_k \rangle$

$O(a_1, a_2, \dots, a_k) = \text{ΕΚΠ}(n_1, \dots, n_k)$

Έστω $O$ κυκλική. Άρα υπάρχει $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in O$ με τάξη $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = \text{ΕΚΠ}(n_1, \dots, n_k)$

$\xRightarrow{\text{Θεωρία Αριθμών}} (n_i, n_j) = 1$ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

$(\Leftarrow)$ Έχουμε $(n_i, n_j) = 1 \Rightarrow n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = \text{ΕΚΠ}(n_1, \dots, n_k)$

Αλλά $n_1 n_2 \cdots n_k = |O|$ και $\text{ΕΚΠ}(n_1, n_2, \dots, n_k) = O(a_1, \dots a_k)$

Άρα υπάρχει στοιχείο $(a_1, \dots, a_k)$ ώστε να έχει τάξη ίση με την τάξη της $O \Rightarrow O$ κυκλική.

Παράδειγμα.

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15}$ κυκλική

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{53}$ κυκλική

$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ όχι κυκλική